| Apellido paterno: | Apellido materno: | Nombre: |
|---|---|---|
| | | |

| Pregunta 1 | Pregunta 2 | Pregunta 3 | Pregunta 4 | Total | Nota |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.
- Duración: 100 minutos.

---

1) **[15 pts.]** Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que satisface:

$$\begin{array}{rcl} T(1,0,-1) & = & (a,1,0) \\ T(1,0,0) & = & (0,1,0) \\ T(1,1,0) & = & (1,0,1) \end{array}$$

a) **[8 pts.]** Para $a = 1$ determine $T(x, y, z)$.

b) **[7 pts.]** Determine el o los valores de $a$ de modo que la nulidad de $T$ sea 1.

2) **[15 pts.]** Considere la transformación lineal $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b, c-a, a+b+d)$.

a) **[5 pts.]** Determine una matriz $A$ de modo que $T\left(2A + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = (1, 2, 4)$.

b) **[6 pts.]** Determine bases para $\mathrm{Ker}(T)$ y $\mathrm{Im}(T)$.

c) **[4 pts.]** Determine si la transformación es un monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo.

3) **[15 pts.]** Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por :

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, x - y + z).$$

Además considere las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$:

$$B_1 = \{(1,0,1), (1,-1,1), (1,1,0)\} \qquad B_2 = \{(1,0,-1), (1,0,0), (1,1,0)\}$$

a) **[10 pts.]** Determine la matriz de la transformación $[T]_{B_1}^{B_2}$.

b) **[5 pts.]** Pruebe que la transformación es un isomorfismo.

4) **[15 pts.]** Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) **[5 pts.]** Determine el o los valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que la matriz sea diagonalizable (Justifique).

b) **[10 pts.]** Para $a = 1$, determine matrices $P$ invertible y $D$ diagonal, de modo que

$$P^{-1}AP = D$$

DESARROLLO

1) a) Observar que

$$(x,y,z) = -z(1,0,-1) + (x-y+z)(1,0,0) + y(1,1,0)\color{red}{(4pts.)}$$

por lo que la transformación es $T(x,y,z) = (y-az, x-y, y)$, y para $a=1$ nos queda $T(x,y,z) = (y-z, x-y, y)$.(4 pts.)

b) Para que la nulidad sea uno debemos calcular el Kernel de la transformación, es decir:

$$\begin{array}{rcl} y-az & = & 0 \\ x-y & = & 0 \;\; \color{red}{(3pts.)} \\ y & = & 0 \end{array}$$

Luego concluimos que $y=0$, $x=0$ y $-az=0$, por lo que para que la nulidad sea 1 el valor de $a$ debe ser 0.(4 pts.)

2) a) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tenemos que

$$T\left(2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2(a+b, c-a, a+b+d) + (3,0,4) = (1,2,4)\color{red}{(2pts.)}$$

De dónde podemos concluir que $(a+b, c-a, a+b+d) = (-1,1,0)$(2 pts.), por lo que queremos que

$$\begin{array}{rcl} a+b & = & -1 \\ c-a & = & 1 \\ a+b+d & = & 0 \end{array}$$

De dónde concluimos que $d=1$, $b=-a-1$ y $c=a+1$, por lo que cualquier matriz que satisface estas ecuaciones nos sirve como solución. Un ejemplo sería $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (1 pts.)

b) El $\mathrm{Ker}(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$(3 pts.) y la $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$ por el teorema de las dimensiones.(3 pts.)

c) Sólo es un epimorfismo.(4 pts.)

3) a) Observar que:

$$\begin{array}{lcccccccccl} T(1,0,1) & = & (1,1,2) & = & -2 & (1,0,-1) & + & 2 & (1,0,0) & + & 1 \;\; (1,1,0)\color{red}{(3pts.)} \\ T(1,-1,1) & = & (0,0,3) & = & -3 & (1,0,-1) & + & 3 & (1,0,0) & + & 0 \;\; (1,1,0)\color{red}{(3pts.)} \\ T(1,1,0) & = & (2,1,0) & = & 0 & (1,0,-1) & + & 1 & (1,0,0) & + & 1 \;\; (1,1,0)\color{red}{(3pts.)} \end{array}$$

Finalmente concluimos que la matriz es

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \color{red}{(1pts.)}$$

b) El determinante de la matriz es $-3$, por lo que podemos concluir que es un isomorfismo. (5 pts.)

4) a) El polinomio característico es $p(\lambda) = -(\lambda-a)(\lambda-3)(\lambda-2)$.(2 pts.) Si $a \neq 2,3$ es diagonalizable ya que tiene tres valores propios distintos.(1 pts.) Ahora hay que ver que pasa si $a=2$ o $a=3$.

- Si $a=2$ nos queda que la multiplicidad algebraica de $\lambda=2$ es 2. Calculemos el espacio propio del 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que $E_2 = \langle (0,0,1) \rangle$ y la multiplicidad geométrica es 1. Concluimos que no es diagonalizable para $a=2$.(1 pts.)

- Si $a=3$ nos queda que la multiplicidad algebraica de $\lambda=3$ es 2. Calculemos el espacio propio de 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Por lo que $E_3 = \langle (1,0,1) \rangle$ y la multiplicidad geométrica es 1. Concluimos que no es diagonalizable para $a=3$.(1 pts.)

Finalmente es diagonalizable para todo $a$ tal que $a \neq 2, 3$.

b) Para $a=1$ la matriz es diagonalizable. El polinomio característico nos da

$$p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).(2pts.)$$

Calculemos los espacios propios.

- $\lambda=1$. Nos queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Por lo que $E_1 = \langle (1,0,-1) \rangle$.(2 pts.)

- $\lambda=2$. Nos queda:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Por lo que $E_2 = \langle (0,0,1) \rangle$.(2 pts.)

- $\lambda=3$. Nos queda:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Por lo que $E_3 = \langle (1,-2,-1) \rangle$. (2 pts.)

Finalmente concluimos que $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. (1 pto. c/u)